［00センター本試 センター本試］

解説

(1)　$\displaystyle\int_{-1}^{0} g(x)dx=\int_{-1}^{0}(3bx^2+ux+v)dx=\left[bx^3+\frac{u}{2}x^2+vx\right]_{-1}^{0}=b-\frac{u}{2}+v$

よって，$\displaystyle\int_{-1}^{0} g(x)dx=-6$ から　　$b-\dfrac{u}{2}+v=-6$

ゆえに　　$u-2v=2b+12$ …… ①

また，放物線 C が点 $(-1,\ -9)$ を通るから　$g(-1)=-9$

よって　　$3b(-1)^2+u(-1)+v=-9$

ゆえに　　$u-v=3b+9$ …… ②

①，② から　　$u={}^{アイ}4b+{}^{ウ}6,\ v={}^{エ}b-{}^{オ}3$

したがって　　$g(x)=3bx^2+(4b+6)x+b-3$

また　　$f'(x)=6ax-8a-6,$

$g'(x)=6bx+4b+6$

放物線 $y=f(x)$ と放物線 C が y 軸上で共有点をもつから　$f(0)=g(0)$

よって　　$4a+6=b-3$　　ゆえに　　$4a-b=-9$ …… ③

また，y 軸上の共有点における二つの放物線の接線が一致するから

$f'(0)=g'(0)$

よって　　$-8a-6=4b+6$　　ゆえに　　$2a+b=-3$ …… ④

③，④ から　　$a={}^{カキ}-2,\ b={}^{ク}1$

このとき　　$f(0)=-2,\ f'(0)=10$

したがって，接線の方程式は

$y-(-2)=10(x-0)$　すなわち　$y={}^{ケコ}10x-{}^{サ}2$

(2)　$\displaystyle h(x)=\int_0^x f(t)dt=\int_0^x\{3at^2-(8a+6)t+4a+6\}dt$

$\displaystyle=\left[at^3-(4a+3)t^2+(4a+6)t\right]_0^x$

$=ax^3-(4a+3)x^2+(4a+6)x,$

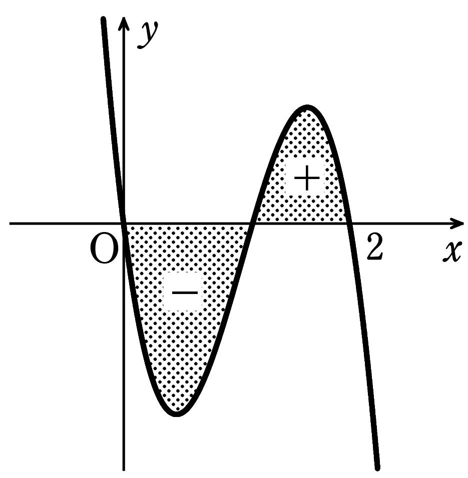
$h'(x)=f(x)=3ax^2-(8a+6)x+4a+6$

よって　$h(0)={}^{シ}0,$

$h(2)=a\cdot 2^3-(4a+3)\cdot 2^2+(4a+6)\cdot 2={}^{ス}0,$

$h'(0)={}^{セ}4a+{}^{ソ}6,$

$h'(2)=3a\cdot 2^2-(8a+6)\cdot 2+4a+6={}^{タチ}-6$



$h(x)$ は 3 次関数であり，$h(0)=h(2)=0,\ h'(2)<0$ であるから，$0\leqq x\leqq 2$ の範囲で $h(x)$ が正の値も負の値もとるための条件は　$h'(0)<0$

よって　　$4a+6<0$　　ゆえに　　$a<\dfrac{{}^{ツテ}-3}{{}^{ト}2}$