

[97センター追試 センター追試]

解説

$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ とおけるから

$$\begin{aligned}\frac{1}{r^2}(11x^2 + 12xy + 6y^2) &= \frac{1}{r^2}(11r^2\cos^2\theta + 12r^2\sin\theta\cos\theta + 6r^2\sin^2\theta) \\ &= 11\cos^2\theta + 12\sin\theta\cos\theta + 6\sin^2\theta \\ &= {}^{\text{ア}}5\cos^2\theta + {}^{\text{イウ}}12\sin\theta\cos\theta + {}^{\text{エ}}6 \\ &= 5 \cdot \frac{1 + \cos 2\theta}{2} + 6\sin 2\theta + 6 \\ &= \frac{{}^{\text{オ}}5}{\text{カ}2}\cos 2\theta + {}^{\text{キ}}6\sin 2\theta + \frac{{}^{\text{クケ}}17}{\text{コ}2} \\ &= \frac{13}{2} \left(\frac{5}{13}\cos 2\theta + \frac{12}{13}\sin 2\theta \right) + \frac{17}{2} \\ &= \frac{{}^{\text{サン}}13}{\text{ス}2}\sin(2\theta + \alpha) + \frac{17}{2}\end{aligned}$$

ただし $\sin\alpha = \frac{{}^{\text{セ}}5}{\text{ソタ}13}$, $\cos\alpha = \frac{{}^{\text{チツ}}12}{\text{テト}13}$

よって, $11x^2 + 12xy + 6y^2 = 4$ から $\frac{4}{r^2} = \frac{13}{2}\sin(2\theta + \alpha) + \frac{17}{2}$

$-1 \leq \sin(2\theta + \alpha) \leq 1$ であるから $2 \leq \frac{4}{r^2} \leq 15$

ゆえに $\frac{4}{15} \leq r^2 \leq 2$

$x^2 + y^2 = r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r^2$ であるから, $x^2 + y^2$ の最大値は ${}^{\text{ナ}}2$, 最小値は $\frac{{}^{\text{ニ}}4}{\text{ヌネ}15}$

である.