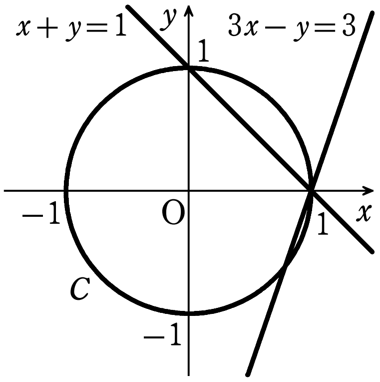
［06センター本試 センター本試］

解説



円 C の方程式は　　$x^2+y^2=1$

(1)　図から，C と直線 $x+y=1$ の共有点の座標は

$$(0,\ {}^{ア}1),\ ({}^{イ}1,\ 0)$$

C と直線 $3x-y=3$ の共有点の座標は，連立方程式

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 & \cdots\cdots ① \\ 3x-y=3 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

の解で与えられる。

② から　　$y=3x-3$　……③

これを ① に代入して整理すると　　$5x^2-9x+4=0$

よって　　$(x-1)(5x-4)=0$　　　　ゆえに　$x=\dfrac{4}{5}$，1

③ から　　$x=\dfrac{4}{5}$ のとき　$y=-\dfrac{3}{5}$，　$x=1$ のとき　$y=0$

よって，C と直線 $3x-y=3$ の共有点の座標は　$\left(\dfrac{{}^{ウ}4}{{}^{エ}5},\ \dfrac{{}^{オカ}-3}{{}^{エ}5}\right)$，$({}^{キ}1,\ 0)$

(2)　ℓ の方程式は　　$y=a\left(x-\dfrac{5}{3}\right)$

C と ℓ が接するとき，C の中心 $(0,\ 0)$ と ℓ との距離が C の半径 1 に等しいから

$$\frac{\left|-\dfrac{5}{3}a\right|}{\sqrt{a^2+(-1)^2}}=1 \qquad よって \qquad 5|a|=3\sqrt{a^2+1}$$

両辺を平方すると　　$25a^2=9(a^2+1)$　　　　ゆえに　　$a^2=\dfrac{9}{16}$

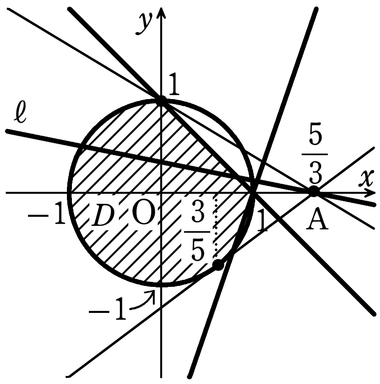
したがって　　$a=\dfrac{{}^{ク}3}{{}^{ケ}4}$　または　$a=-\dfrac{3}{4}$

$a=\dfrac{3}{4}$ のとき，ℓ の方程式は　　$y=\dfrac{3}{4}\left(x-\dfrac{5}{3}\right)$

C と ℓ の接点は，C の中心 $(0,\ 0)$ を通り ℓ に垂直な直線 $y=-\dfrac{4}{3}x$ と ℓ との交点である。　$\dfrac{3}{4}\left(x-\dfrac{5}{3}\right)=-\dfrac{4}{3}x$ を解くと　　$x=\dfrac{3}{5}$

よって，接点の x 座標は　$\dfrac{{}^{\text{コ}}3}{{}^{\text{サ}}5}$　　$\left(a=-\dfrac{3}{4}\right.$ のときの接点の x 座標も $\dfrac{3}{5}$ になる。$\left.\right)$

領域 D は右図の斜線部分である。ただし，境界線を含む。



図から，ℓ と D が共有点をもつような傾き a の値は，ℓ が D 上で円 C と接するとき最大になる。

このとき　$a=\dfrac{{}^{\text{シ}}3}{{}^{\text{ス}}4}$

また，a の値は ℓ が点 $(0,\ 1)$ を通るとき最小になる。

このとき　$1=a\left(0-\dfrac{5}{3}\right)$　　　よって　$a=\dfrac{{}^{\text{セソ}}-3}{{}^{\text{タ}}5}$