

[97センター追試 センター追試]

実数 x, y が $11x^2 + 12xy + 6y^2 = 4$ を満たすとき、 $x^2 + y^2$ の最大値と最小値を次のように求めよう。

xy 平面上の原点 O と他の点 $P(x, y)$ を結ぶ線分 OP の長さを r 、 x 軸と動径 OP のなす角を θ とすると、

$$\begin{aligned}\frac{1}{r^2}(11x^2 + 12xy + 6y^2) &= \boxed{\text{ア}} \cos^2 \theta + \boxed{\text{イウ}} \sin \theta \cos \theta + \boxed{\text{エ}} \\ &= \frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}} \cos 2\theta + \boxed{\text{キ}} \sin 2\theta + \frac{\boxed{\text{クケ}}}{\boxed{\text{コ}}} \\ &= \frac{\boxed{\text{サシ}}}{\boxed{\text{ス}}} \sin(2\theta + \alpha) + \frac{\boxed{\text{クケ}}}{\boxed{\text{コ}}}\end{aligned}$$

である。ただし、 $\sin \alpha = \frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソタ}}}$ 、 $\cos \alpha = \frac{\boxed{\text{チツ}}}{\boxed{\text{テト}}}$ である。

したがって、 $x^2 + y^2$ の最大値は $\boxed{\text{ナ}}$ 、最小値は $\frac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌネ}}}$ である。