［97センター本試 センター本試］

解説

$\log_2(x^2+\sqrt{2})$ は，底 $2>1$ であるから増加関数.

よって$x={}^{\text{ア}}0$ のとき最小値 $\log_2\sqrt{2}=\dfrac{{}^{\text{イ}}1}{{}^{\text{ウ}}2}$ をとる.

$t=\log_2(x^2+\sqrt{2})$ とおくと，① から　$t^2-2t+a=0,\ t\geqq\dfrac{1}{2}$

すなわち　$t=1\pm\sqrt{1-a},\ t\geqq\dfrac{1}{2}$

よって，解をもつ条件は　$1-a\geqq 0,\ 1+\sqrt{1-a}\geqq\dfrac{1}{2}$　　ゆえに　$a\leqq{}^{\text{エ}}1$

$a=1$ のとき　$t^2-2t+1=0$ から　$t=1$ すなわち $\log_2(x^2+\sqrt{2})=1$

ゆえに　$x=\pm\sqrt{2-\sqrt{2}}$ であるから，方程式 ① は ${}^{\text{オ}}2$ 個の解をもつ.

また，方程式 ① が 3 個の解をもつのは，$x=0$ を解にもつとき.

よって　$t^2-2t+a=0$ が $t=\dfrac{1}{2}$ を解にもてばよいから

$\left(\dfrac{1}{2}\right)^2-2\cdot\dfrac{1}{2}+a=0$　　ゆえに　$a=\dfrac{{}^{\text{カ}}3}{{}^{\text{キ}}4}$