［02センター追試 センター追試］

解説

(1)　曲線 C_1：$y=mx^2+nx$ が，点 A (1，0) を通るから　$m+n=0$　……①

また，$y'=2mx+n$

原点 O における接線の傾きが 1 であるから　$n=1$　……②

①，② から　$m={}^{アイ}-1$，$n={}^{ウ}1$

曲線 C_2：$y=px^3+qx^2+rx$ が，点 A (1，0) を通るから　$p+q+r=0$　……③

点 B (−1，0) を通るから　$-p+q-r=0$　……④

また，$y'=3px^2+2qx+r$

原点 O における接線の傾きが a であるから　$r=a$　……⑤

③，④，⑤ から　$p={}^{エオ}-a$，$q={}^{カ}0$，$r={}^{キ}a$

(2)　(1) から　C_1：$y=-x^2+x$，C_2：$y=-ax^3+ax$

交点の x 座標は $-x^2+x=-ax^3+ax$ の解に対応する．

変形すると　$ax^3-x^2-(a-1)x=0$　　ゆえに　$x(x-1)(ax+a-1)=0$

よって　$x=0$，${}^{ク}1$，$\dfrac{{}^{ケ}1}{{}^{コ}a}-{}^{サ}1$

したがって，$0<\dfrac{1}{a}-1<1$ であればよい．　ゆえに　$\dfrac{{}^{シ}1}{{}^{ス}2}<a<{}^{セ}1$

(3)　$y=-x^2+x$ を微分すると　$y'=-2x+1$

よって，C_1 の A (1，0) における接線 l_1 の方程式は　$y={}^{ソ}-x+{}^{タ}1$

また，C_2 の O における接線 l_2 の方程式は　$y=ax$

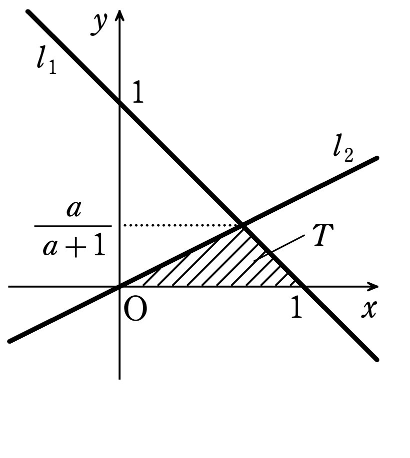
l_1 と l_2 の交点の y 座標は $y=a(-y+1)$ から　$y=\dfrac{a}{a+1}$

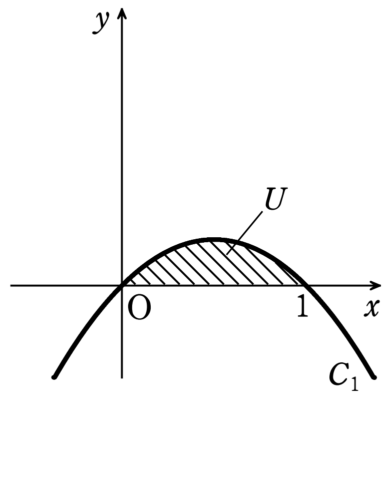
ゆえに，x 軸と l_1，l_2 で囲まれた部分の面積 T は

$$T=\frac{1}{2}\times1\times\frac{a}{a+1}=\frac{{}^{チ}a}{{}^{ツ}2({}^{テ}a+1)}$$

また，x 軸と C_1 で囲まれた部分の面積 U は

$$U=\int_0^1(-x^2+x)dx=-\int_0^1 x(x-1)dx=\frac{{}^{ト}1}{{}^{ナ}6}$$





$0<a<1$ であるから l_2 は $0<x<1$ で C_1 と交わる．

右の図の縦線の部分の面積を S とすると

$$S_1=S_2 \Longleftrightarrow S_1+S=S_2+S \Longleftrightarrow U=T$$

ゆえに，$S_1=S_2$ となるのは　$U=T$ のときである．

よって　$\dfrac{1}{6}=\dfrac{a}{2(a+1)}$

これを解くと　$a=\dfrac{{}^{\text{ニ}}1}{{}^{\text{ヌ}}2}$