［11センター追試 センター追試］

解説

$$S_3=a_1+(a_2+a_3)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2(2+2)}=\frac{1}{2}+\frac{1}{8}=\frac{{}^{\text{ア}}5}{{}^{\text{イ}}8},$$

$$S_4=(a_1+a_2)+(a_3+a_4)=\frac{1}{1(1+2)}+\frac{1}{3(3+2)}=\frac{1}{3}+\frac{1}{15}=\frac{{}^{\text{ウ}}2}{{}^{\text{エ}}5}$$

自然数 m に対して

$$\begin{aligned}S_{2m}&=\sum_{k=1}^{m}(a_{2k-1}+a_{2k})=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{(2k-1)\{(2k-1)+2\}}=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}\\&=\sum_{k=1}^{m}\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)\right\}=\frac{1}{{}^{\text{オ}}2}\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{2k-{}^{\text{カ}}1}-\frac{1}{2k+{}^{\text{キ}}1}\right)\\&=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{1}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{5}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{5}}-\cancel{\frac{1}{7}}\right)+\cdots\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{2m-1}}-\frac{1}{2m+1}\right)\right\}\\&=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2m+1}\right)=\frac{m}{{}^{\text{ク}}2m+{}^{\text{ケ}}1}\end{aligned}$$

同様に

$$\begin{aligned}S_{2m+1}&=a_1+\sum_{k=1}^{m}(a_{2k}+a_{2k+1})=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{2k(2k+2)}=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{4k(k+1)}\\&=\frac{1}{2}+\frac{1}{{}^{\text{コ}}4}\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+{}^{\text{サ}}1}\right)\\&=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\left\{\left(\frac{1}{1}-\cancel{\frac{1}{2}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{4}}\right)+\cdots\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{m}}-\frac{1}{m+1}\right)\right\}\\&=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{m+1}\right)=\frac{1}{2}+\frac{m}{4(m+1)}=\frac{2(m+1)+m}{4(m+1)}\\&=\frac{{}^{\text{シ}}3m+2}{{}^{\text{ス}}4(m+{}^{\text{セ}}1)}\quad\cdots\cdots①\end{aligned}$$

$S_1=a_1=\dfrac{1}{2}$ であるから，① は $m=0$ のときも成り立つ。

したがって，自然数 m に対して

$$\begin{aligned}a_{2m}&=S_{2m}-S_{2m-1}=S_{2m}-S_{2(m-1)+1}=\frac{m}{2m+1}-\frac{3(m-1)+2}{4\{(m-1)+1\}}\\&=\frac{m}{2m+1}-\frac{3m-1}{4m}=\frac{m\cdot 4m-(3m-1)(2m+1)}{(2m+1)\cdot 4m}\\&=\frac{4m^2-(6m^2+m-1)}{4m(2m+1)}=\frac{{}^{\text{ソタ}}-2m^{{}^{\text{チ}}2}-m+{}^{\text{ツ}}1}{{}^{\text{テ}}4m(2m+1)},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a_{2m+1}&=S_{2m+1}-S_{2m}=\frac{3m+2}{4(m+1)}-\frac{m}{2m+1}\\&=\frac{(3m+2)(2m+1)-m\cdot 4(m+1)}{4(m+1)(2m+1)}=\frac{(6m^2+7m+2)-(4m^2+4m)}{4(m+1)(2m+1)}\\&=\frac{2m^2+3m+2}{4(m+1)(2m+1)}\end{aligned}$$

以上から，2 以上の自然数 n に対して，

$n=2m$ のとき，$m=\dfrac{n}{2}$ であるから

$$a_n=a_{2m}=\frac{-2m^2-m+1}{4m(2m+1)}=\frac{-2\cdot\left(\dfrac{n}{2}\right)^2-\dfrac{n}{2}+1}{4\cdot\dfrac{n}{2}\cdot\left(2\cdot\dfrac{n}{2}+1\right)}=\frac{-n^2-n+2}{4n(n+1)}$$

$$=\frac{-n(n+1)+2}{4n(n+1)}=\frac{1}{2n(n+1)}-\frac{1}{4}$$

$n=2m+1$ のとき，$m=\dfrac{n-1}{2}$ であるから

$$a_n=a_{2m+1}=\frac{2m^2+3m+2}{4(m+1)(2m+1)}=\frac{2\cdot\left(\dfrac{n-1}{2}\right)^2+3\cdot\dfrac{n-1}{2}+2}{4\left(\dfrac{n-1}{2}+1\right)\left(2\cdot\dfrac{n-1}{2}+1\right)}=\frac{n^2+n+2}{4(n+1)n}$$

$$=\frac{n(n+1)+2}{4n(n+1)}=\frac{1}{2n(n+1)}+\frac{1}{4}$$

すなわち　$a_n=\dfrac{1}{{}^{\text{ト}}2n(n+{}^{\text{ナ}}1)}+\dfrac{(-{}^{\text{ニ}}1)^{n+1}}{{}^{\text{ヌ}}4}$　……(＊)

参考　$a_1=\dfrac{1}{2}$ であるから，(＊) は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって，(＊) はすべての自然数 n に対して成り立つ。