［11センター追試 センター追試］

数列$\{a_n\}$は，漸化式 $a_1=\dfrac{1}{2}$，$a_n+a_{n+1}=\dfrac{1}{n(n+2)}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ を満たすとする。$\{a_n\}$の初項から第 n 項までの和を S_n とする。

$S_3=a_1+(a_2+a_3)=\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$，$S_4=(a_1+a_2)+(a_3+a_4)=\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$ である。

自然数 m に対して，$S_{2m}=\displaystyle\sum_{k=1}^{m}(a_{2k-1}+a_{2k})$ と表されるので

$$S_{2m}=\frac{1}{\boxed{\text{オ}}}\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{2k-\boxed{\text{カ}}}-\frac{1}{2k+\boxed{\text{キ}}}\right)$$

$$=\frac{m}{\boxed{\text{ク}}m+\boxed{\text{ケ}}}$$

であり，同様に，$S_{2m+1}=a_1+\displaystyle\sum_{k=1}^{m}(a_{2k}+a_{2k+1})$ と表されるので

$$S_{2m+1}=\frac{1}{2}+\frac{1}{\boxed{\text{コ}}}\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+\boxed{\text{サ}}}\right)$$

$$=\frac{\boxed{\text{シ}}m+2}{\boxed{\text{ス}}(m+\boxed{\text{セ}})}$$

である。したがって，自然数 m に対して

$$a_{2m}=\frac{\boxed{\text{ソタ}}m^{\boxed{\text{チ}}}-m+\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}m(\boxed{\text{ク}}m+\boxed{\text{ケ}})}$$

$$a_{2m+1}=\frac{2m^{\boxed{\text{チ}}}+3m+2}{\boxed{\text{テ}}(m+\boxed{\text{セ}})(\boxed{\text{ク}}m+\boxed{\text{ケ}})}$$

である。以上のことから，2 以上の自然数 n に対して

$$a_n=\frac{1}{\boxed{\text{ト}}n(n+\boxed{\text{ナ}})}+\frac{(-\boxed{\text{ニ}})^{n+1}}{\boxed{\text{ヌ}}}\quad\cdots\cdots(*)$$

である。$a_1=\dfrac{1}{2}$ であるから，$(*)$は $n=1$ のときにも成り立つので，$(*)$はすべての自然数 n に対して成り立つ。