

[11センター追試 センター追試]

解説

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta},$$

$$\begin{aligned}\tan 4\theta &= \tan(2 \cdot 2\theta) = \frac{2\tan 2\theta}{1-\tan^2 2\theta} = \frac{2 \cdot \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}}{1-\left(\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}\right)^2} = \frac{4\tan\theta(1-\tan^2\theta)}{(1-\tan^2\theta)^2 - (2\tan\theta)^2} \\ &= \frac{-4\tan^3\theta + 4\tan\theta}{\tan^4\theta - 6\tan^2\theta + 1} \dots\dots ②\end{aligned}$$

$$\text{①, ② から } \frac{-4\tan^3\theta + 4\tan\theta}{\tan^4\theta - 6\tan^2\theta + 1} = \frac{1}{2}\tan\theta$$

$$\text{両辺を 2 倍して整理すると } \tan\theta + 2 \cdot \frac{4\tan\theta(\tan^2\theta - 1)}{\tan^4\theta - 6\tan^2\theta + 1} = 0$$

$$\text{すなわち } \frac{\tan\theta\{(\tan^4\theta - 6\tan^2\theta + 1) + 8(\tan^2\theta - 1)\}}{\tan^4\theta - 6\tan^2\theta + 1} = 0$$

$$\text{よって } \frac{\tan\theta(\tan^4\theta + 2\tan^2\theta - 7)}{\tan^4\theta - 6\tan^2\theta + 1} = 0 \dots\dots ③$$

$$\text{ここで, } \frac{\pi}{8} < \theta < \frac{3}{8}\pi \text{ より } \tan\theta > 0$$

$$\text{ゆえに, ③ から } \tan^4\theta + 2\tan^2\theta - 7 = 0$$

$$\tan^2\theta \text{ について解くと } \tan^2\theta = -1 \pm 2\sqrt{2}$$

$$\tan\theta > 0, \tan^2\theta > 0 \text{ であるから } \tan\theta = \sqrt{-1 + 2\sqrt{2}}$$

$$\text{また, } 1 < \sqrt{2} < 2 \text{ であるから } 1 < -1 + 2\sqrt{2} < 3$$

$$\text{よって } 1 < \sqrt{-1 + 2\sqrt{2}} < \sqrt{3}$$

$$\text{すなわち } \tan\frac{\pi}{4} < \sqrt{-1 + 2\sqrt{2}} < \tan\frac{\pi}{3}$$

$$\text{ゆえに, } \tan\theta = \sqrt{-1 + 2\sqrt{2}} \text{ を満たす } \theta \text{ について } \frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{3}$$

したがって シ ②