［07センター本試 センター本試］

解説

(1)　$a_{n+1}=3a_n+60$ を変形すると　　$a_{n+1}+30=3(a_n+30)$

よって，数列 $\{a_n+30\}$ は初項 $a_1+30=-27+30=3$，公比 3 の等比数列であるから

$$a_n+30=3\cdot 3^{n-1} \qquad \text{よって} \quad a_n={}^{ア}3^n-{}^{イウ}30$$

数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n は

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}(3^k-30)=\frac{3(3^n-1)}{3-1}-30n=\frac{{}^{エ}3}{{}^{オ}2}({}^{カ}3^n-{}^{キ}1)-30n$$

また，$S_n>0$ とすると　　$\frac{3}{2}(3^n-1)-30n>0$

変形すると　　$3^n>20n+1$　…… ①

$n=1$，2，3，4，5 のとき，3^n と $20n+1$ の値を計算すると，右の表のようになる。

n	1	2	3	4	5
3^n	3	9	27	81	243
$20n+1$	21	41	61	81	101

ゆえに，① が成り立つ最小の自然数 n は

$$n=5$$

したがって，$S_n>0$ となる最小の自然数 n は　　$n={}^{ク}5$

(2)　条件から　　$2b_n+c_n=d(n-1)$，　$b_n-2c_n=xr^{n-1}$

$d(n-1)=A$，$xr^{n-1}=B$ とおくと

$$2b_n+c_n=A \ \cdots\cdots ②, \qquad b_n-2c_n=B \ \cdots\cdots ③$$

②× 2+③ から　　$5b_n=2A+B$　　　よって　$b_n=\frac{2}{5}A+\frac{1}{5}B$

②−③× 2 から　　$5c_n=A-2B$　　　よって　$c_n=\frac{1}{5}A-\frac{2}{5}B$

したがって　　$b_n+c_n=\left(\frac{2}{5}A+\frac{1}{5}B\right)+\left(\frac{1}{5}A-\frac{2}{5}B\right)=\frac{3}{5}A-\frac{1}{5}B$

$$=\frac{{}^{ケ}3}{{}^{コ}5}d(n-1)-\frac{{}^{サ}1}{{}^{シ}5}xr^{n-1}$$

別解　②× 3−③ から　　$5b_n+5c_n=3A-B$

よって　　$b_n+c_n=\frac{3}{5}A-\frac{1}{5}B=\frac{3}{5}d(n-1)-\frac{1}{5}xr^{n-1}$

(3)　数列 $\{a_n\}$ は数列 $\{b_n+c_n\}$ の階差数列であるから

$$a_n=b_{n+1}+c_{n+1}-(b_n+c_n)=\frac{3}{5}dn-\frac{1}{5}xr^n-\frac{3}{5}d(n-1)+\frac{1}{5}xr^{n-1}$$

$$=\frac{3}{5}d+\frac{1}{5}x(1-r)r^{n-1}$$

これが (1) の $a_n=3^n-30$ と同じであるから

$$r=3,\ \frac{1}{5}x(1-r)=3,\ \frac{3}{5}d=-30$$

これを解くと　　$r=^{ス}3$，$x=\dfrac{^{セソタ}-15}{^{チ}2}$，$d=^{ツテト}-50$

このとき，(2) において，$A=-50(n-1)$，$B=-\dfrac{15}{2}\cdot 3^{n-1}=-\dfrac{5}{2}\cdot 3^n$ であるから

$$b_n=\frac{2}{5}A+\frac{1}{5}B=\frac{2}{5}\cdot\{-50(n-1)\}+\frac{1}{5}\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)\cdot 3^n$$

$$=-\frac{^{ナ}3^n}{^{ニ}2}-{}^{ヌネ}20(n-1)$$

$$c_n=\frac{1}{5}A-\frac{2}{5}B=\frac{1}{5}\cdot\{-50(n-1)\}-\frac{2}{5}\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)\cdot 3^n$$

$$={}^{ノ}3^n-{}^{ハヒ}10(n-1)$$