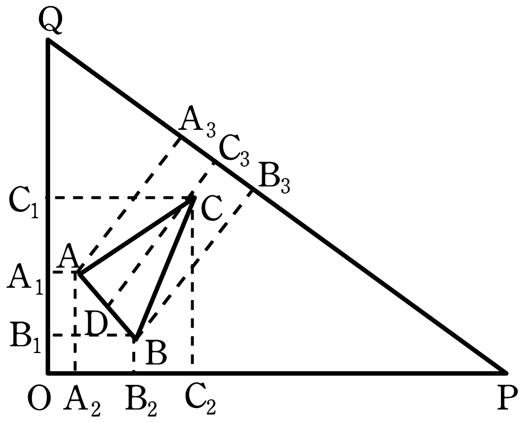
［05センター本試 センター本試］

(解説)



A_1 が線分 B_1C_1 の中点であるから　　$w=$ ア$-y$

B_2 が線分 A_2C_2 の中点であるから　　$z=$ イ$2x$

$AA_3 /\!/ BB_3$ であり，D は線分 AB の中点，C_3 は線分 A_3B_3 の中点であるから

$$DC_3 /\!/ AA_3$$

$AA_3 \perp PQ$ であるから　　$DC_3 \perp PQ$　　　よって　　$\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{PQ}=$ ウ0　…… ①

また　　$\overrightarrow{PQ}=(0-4,\ 3-0)=($エオ$-4,$ カ$3)$

$$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\frac{{}^{キ}1}{{}^{ク}2}(\overrightarrow{AB}-{}^{ケ}2\overrightarrow{AC})=\frac{1}{2}\{(x,\ y)-2(2x,\ -y)\}$$

$$=\frac{1}{2}(-3x,\ 3y)$$

ゆえに，① から　　$\frac{1}{2}\{(-3x)\cdot(-4)+3y\cdot3\}=0$　　よって　　$y=\frac{{}^{コサ}-4}{{}^{シ}3}x$

したがって　$\overrightarrow{AB}=(x,\ y)=\left(x,\ -\frac{4}{3}x\right)=x\left(1,\ -\frac{4}{3}\right)$

$\overrightarrow{AC}=(2x,\ -y)=\left(2x,\ \frac{4}{3}x\right)=x\left(2,\ \frac{{}^{ス}4}{{}^{セ}3}\right)$

$x>0$ であるから　　$AB=|\overrightarrow{AB}|=x\sqrt{1^2+\left(-\frac{4}{3}\right)^2}=\frac{5}{3}x$　…… ②

$AC=|\overrightarrow{AC}|=x\sqrt{2^2+\left(\frac{4}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{13}}{3}x$　…… ③

② から　　$x=\frac{3}{5}AB$

③ に代入して　$AC=\frac{2\sqrt{13}}{3}\cdot\frac{3}{5}AB=\frac{{}^{ソ}2\sqrt{{}^{タチ}13}}{{}^{ツ}5}AB$

また　　$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=x^2\left\{1\cdot2+\left(-\frac{4}{3}\right)\cdot\frac{4}{3}\right\}=\frac{2}{9}x^2$

よって　$\cos\angle BAC=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}=\frac{\frac{2}{9}x^2}{\frac{5}{3}x\cdot\frac{2\sqrt{13}}{3}x}=\frac{1}{5\sqrt{13}}=\frac{\sqrt{{}^{テト}13}}{{}^{ナニ}65}$