［04センター本試 センター本試］

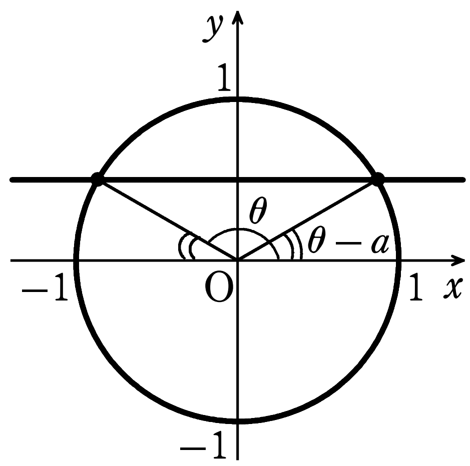
解説

(1)　$f(\theta)=0$ とすると　$\sin(\theta-a)=\sin\theta$

これを満たす角度 θ，$\theta-a$ は右の図のようになる

から　　$\theta-a=180^\circ-\theta$

ゆえに　$\theta={}^{\text{アイ}}90^\circ+\dfrac{a}{2}$



これが $\sin(\theta-a)=\dfrac{1}{2}$ を満たすとき

$$\sin\left(90^\circ+\frac{a}{2}-a\right)=\frac{1}{2}$$

すなわち　$\sin\left(90^\circ-\dfrac{a}{2}\right)=\dfrac{1}{2}$　　よって　$\cos\dfrac{a}{2}=\dfrac{1}{2}$

$0^\circ<\dfrac{a}{2}<90^\circ$ であるから　$\dfrac{a}{2}=60^\circ$

したがって　$a={}^{\text{ウエオ}}120^\circ$

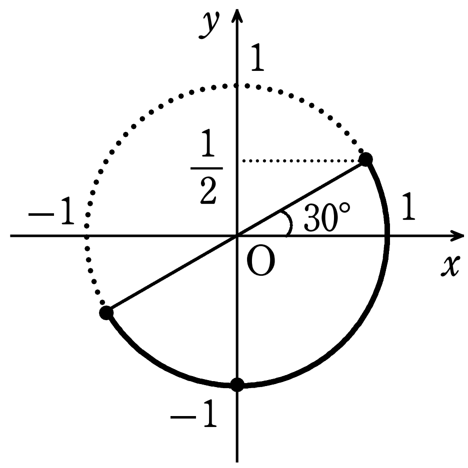
(2)　$a=120^\circ$ のとき

$f(\theta)=\sin(\theta-120^\circ)-\sin\theta=\sin\theta\cos120^\circ-\cos\theta\sin120^\circ-\sin\theta$

$$=-\frac{3}{2}\sin\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta=\sqrt{3}\sin(\theta-150^\circ)$$

$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ であるから　$-150^\circ\leqq\theta-150^\circ\leqq30^\circ$

よって，右の図から　$-1\leqq\sin(\theta-150^\circ)\leqq\dfrac{1}{2}$



ゆえに，$f(\theta)$ は

$\theta-150^\circ=30^\circ$　すなわち

$\theta={}^{\text{カキク}}180^\circ$ のとき最大値 $\dfrac{\sqrt{{}^{\text{ケ}}3}}{{}^{\text{コ}}2}$，

$\theta-150^\circ=-90^\circ$　すなわち

$\theta={}^{\text{サシ}}60^\circ$ のとき最小値 $-\sqrt{{}^{\text{ス}}3}$

をとる．

別解　和 $\longrightarrow$ 積の公式を利用すると

$$f(\theta)=\sin(\theta-a)-\sin\theta=2\cos\frac{2\theta-a}{2}\sin\left(\frac{-a}{2}\right)=-2\cos\frac{2\theta-a}{2}\sin\frac{a}{2}$$

(1)　$f(\theta)=0$ とすると　$-2\cos\dfrac{2\theta-a}{2}\sin\dfrac{a}{2}=0$

$0^\circ<\dfrac{a}{2}<90^\circ$ であるから　$\sin\dfrac{a}{2}\fallingdotseq 0$

よって　$\cos\dfrac{2\theta-a}{2}=0$

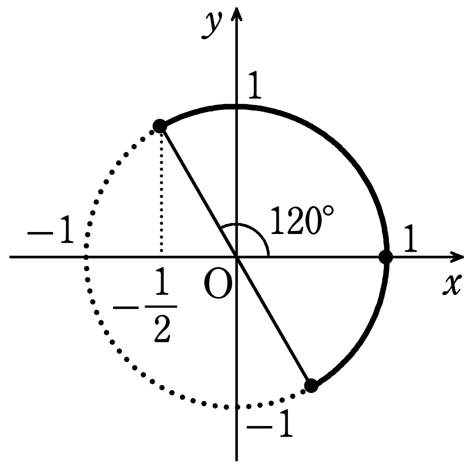
ここで，$-90^\circ<\dfrac{2\theta-a}{2}<180^\circ$ であるから　$\dfrac{2\theta-a}{2}=90^\circ$

よって　$\theta=90°+\dfrac{a}{2}$　(以下同様)

(2)　$a=120°$ のとき　$f(\theta)=-2\cos\dfrac{2\theta-120°}{2}\sin 60°=-\sqrt{3}\cos(\theta-60°)$

$0°\leqq\theta\leqq180°$ であるから　$-60°\leqq\theta-60°\leqq120°$

よって，右の図から　$-\dfrac{1}{2}\leqq\cos(\theta-60°)\leqq1$



ゆえに，$f(\theta)$ は

$\theta-60°=120°$　すなわち

$\theta=180°$ のとき最大値 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\theta-60°=0°$　すなわち

$\theta=60°$ のとき最小値 $-\sqrt{3}$

をとる．