［04センター本試 センター本試］

解説

(1)　$a \fallingdotseq 1$ であるから　$a+1 \fallingdotseq 2a$

よって，2 点 $\mathrm{P}(a+1,\ (a+1)^2)$，$\mathrm{Q}(2a,\ 4a^2)$ を通る直線 l の方程式は

$$y=\frac{(a+1)^2-4a^2}{a+1-2a}(x-2a)+4a^2$$

すなわち　$y=\dfrac{(a+1+2a)(a+1-2a)}{1-a}(x-2a)+4a^2$

ゆえに　$l:\ y=({}^{ア}3a+{}^{イ}1)x-{}^{ウ}2a^2-{}^{エ}2a$　…… ①

$b \fallingdotseq 1$ で，2 点 $\mathrm{R}(b+1,\ (b+1)^2)$，$\mathrm{S}(2b,\ 4b^2)$ を通る直線 m の方程式は，① において a を b におき換えたものである．

よって　$m:\ y=(3b+1)x-2b^2-2b$　…… ②

l と m の交点の座標は，連立方程式 ①，② の解である．

①－② より　$0=3(a-b)x-2(a-b)(a+b)-2(a-b)$

$a \fallingdotseq b$ であるから，両辺を $a-b$ で割って　$0=3x-2(a+b)-2$

ゆえに　$x=\dfrac{2}{3}(a+b+1)$

① に代入して　$y=(3a+1)\cdot\dfrac{2}{3}(a+b+1)-2a^2-2a$

$$=2a(a+b+1)+\frac{2}{3}(a+b+1)-2a^2-2a$$

$$=2ab+\frac{2}{3}(a+b+1)$$

よって，交点 T の座標は　$\mathrm{T}\left(\dfrac{{}^{オ}2}{{}^{カ}3}(a+b+1),\ {}^{キ}2ab+\dfrac{2}{3}(a+b+1)\right)$

ここで　$\displaystyle\lim_{b\to a}\frac{2}{3}(a+b+1)=\frac{4}{3}a+\frac{2}{3}$

$$\lim_{b\to a}\left\{2ab+\frac{2}{3}(a+b+1)\right\}=2a^2+\frac{4}{3}a+\frac{2}{3}$$

したがって，点 T は点 $\mathrm{U}\left(\dfrac{{}^{ク}4}{{}^{ケ}3}a+\dfrac{{}^{コ}2}{3},\ {}^{サ}2a^2+\dfrac{4}{3}a+\dfrac{2}{3}\right)$ に近づく．

(2)　$X=\dfrac{4}{3}a+\dfrac{2}{3}$ …… ③，$Y=2a^2+\dfrac{4}{3}a+\dfrac{2}{3}$ …… ④ とすると　　$Y=2a^2+X$

また，③ より $a=\dfrac{3X-2}{4}$ であるから，これを代入すると

$Y=2\left(\dfrac{3X-2}{4}\right)^2+X$　　すなわち　$Y=\dfrac{9X^2-12X+4}{8}+X$

ゆえに　$Y=\dfrac{9X^2-4X+4}{8}$

よって，点 U は放物線 D：$y=\dfrac{{}^{シ}9x^2-{}^{ス}4x+{}^{セ}4}{{}^{ソ}8}$ 上にある．

このとき，$y'=\dfrac{9}{4}x-\dfrac{1}{2}$ であるから，点 U における D の接線の傾きは

$$\frac{9}{4}\left(\frac{4}{3}a+\frac{2}{3}\right)-\frac{1}{2}={}^{タ}3a+{}^{チ}1$$

よって，点 U における D の接線の方程式は

$$y=(3a+1)\left(x-\frac{4}{3}a-\frac{2}{3}\right)+2a^2+\frac{4}{3}a+\frac{2}{3}$$

これが原点を通るから　$0=(3a+1)\left(-\dfrac{4}{3}a-\dfrac{2}{3}\right)+2a^2+\dfrac{4}{3}a+\dfrac{2}{3}$

整理すると　$2a(a+1)=0$　　よって　$a=0,\ -1$

このとき，接線の傾きはそれぞれ　$3\cdot 0+1=1,\ 3\cdot(-1)+1=-2$

したがって，求める接線の方程式は　$y=x,\ y={}^{ツテ}-2x$

別解　D の接線の方程式は判別式を利用して求めてもよい．

原点を通る D の接線の方程式を $y=mx$ とおく．

$\dfrac{9x^2-4x+4}{8}=mx$ とすると　$9x^2-(8m+4)x+4=0$

この 2 次方程式の判別式が 0 であるから　$(4m+2)^2-9\cdot 4=0$

よって　$m^2+m-2=0$　すなわち　$(m-1)(m+2)=0$

ゆえに　$m=1,\ -2$

よって，接線の方程式は　$y=x,\ y=-2x$

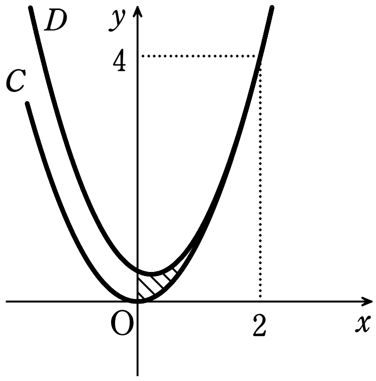
(3)　$\dfrac{9x^2-4x+4}{8}=x^2$ とすると　$x^2-4x+4=0$

すなわち　$(x-2)^2=0$　　よって　$x=2$

このとき　$y=4$

よって，放物線 $C,\ D$ は 1 点 $({}^{ト}2,\ {}^{ナ}4)$ を共有する．

ゆえに，求める面積は，右の図から



$$\int_0^2\left(\frac{9x^2-4x+4}{8}-x^2\right)dx$$

$$=\int_0^2\frac{(x-2)^2}{8}dx=\frac{1}{8}\left[\frac{1}{3}(x-2)^3\right]_0^2$$

$$=-\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{3}(-2)^3=\frac{{}^{ニ}1}{{}^{ヌ}3}$$

参考　$\displaystyle\int(x+p)^2dx=\frac{1}{3}(x+p)^3+C$　(C は積分定数)