［02センター追試 センター追試］

解説

(1)　$|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|=1$ の両辺を平方して　$|\overrightarrow{OA}|^2+2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+|\overrightarrow{OB}|^2=1$

$|\overrightarrow{OA}|=1$ であるから　$2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+|\overrightarrow{OB}|^2=0$　…… ①

また，$|2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|=1$ の両辺を平方して　$4|\overrightarrow{OA}|^2+4\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+|\overrightarrow{OB}|^2=1$

$|\overrightarrow{OA}|=1$ であるから　$4\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+|\overrightarrow{OB}|^2=-3$　…… ②

①，② から　$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=-\dfrac{^{ア}3}{_{イ}2}$，$|\overrightarrow{OB}|^2=3$

$|\overrightarrow{OB}|>0$ であるから　$|\overrightarrow{OB}|=\sqrt{^{ウ}3}$

また　$|\overrightarrow{AB}|^2=|\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}|^2=|\overrightarrow{OB}|^2-2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+|\overrightarrow{OA}|^2=7$

$|\overrightarrow{AB}|>0$ であるから　$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{^{エ}7}$

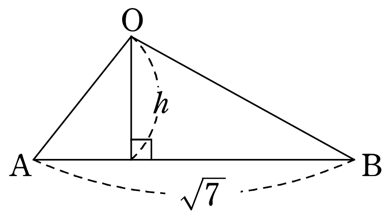
(2)　$\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ のなす角を θ とする．

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=-\dfrac{3}{2}$ から　$|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\cos\theta=-\dfrac{3}{2}$　　よって　$\cos\theta=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin\theta=\sqrt{1-\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\dfrac{1}{2}$ であるから，△ABC の面積は

$$\frac{1}{2}|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\sin\theta=\frac{\sqrt{^{オ}3}}{_{カ}4}$$

O から辺 AB に下ろした垂線の長さを h とする．



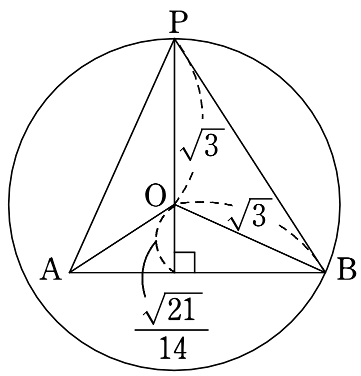
$\triangle OAB=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|h=\dfrac{\sqrt{7}}{2}h$

よって　$\dfrac{\sqrt{7}}{2}h=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

ゆえに　$h=\dfrac{\sqrt{^{キク}21}}{_{ケコ}14}$

(3)　P は O を中心とした半径 $\sqrt{3}$ の円周上を動く．

P から AB に下ろした垂線の長さが最大となるのは，右の図より，P が直線 AB に関して O と同じ側にあり垂線が O を通るときであるから，その最大値は



$$\sqrt{3}+\frac{\sqrt{21}}{14}=\sqrt{^{サ}3}\left(1+\frac{\sqrt{^{シ}7}}{_{スセ}14}\right)$$

このとき，S も最大となるから最大値は

$$\frac{1}{2}\times\sqrt{7}\times\sqrt{3}\left(1+\frac{\sqrt{7}}{14}\right)=\frac{\sqrt{^{ソ}3}+2\sqrt{^{タチ}21}}{_{ツ}4}$$