［01センター本試 センター本試］

解説

$y=x^2$ から　$y'=2x$　　よって，点 $\mathrm{P}(a,\ a^2)$ における接線 l の方程式は

$$y-a^2=2a(x-a) \text{ すなわち } y=2ax-a^2$$

よって，接線 l と y 軸との交点 Q の座標は $\mathrm{Q}\left(0,\ {}^{ア}-a^{{}^{イ}2}\right)$ である．

l と y 軸のなす角が 30°，すなわち l と x 軸のなす角が 60° のとき

$$2a=\tan 60^\circ \qquad \text{よって} \quad a=\frac{\sqrt{{}^{ウ}3}}{{}^{エ}2}$$

このとき，$\mathrm{P}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{3}{4}\right)$，$\mathrm{Q}\left(0,\ -\dfrac{3}{4}\right)$ であるから

$$\mathrm{PQ}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{4}+\frac{3}{4}\right)^2}=\sqrt{{}^{オ}3}$$

また，求める面積は

$$\pi(\sqrt{3})^2\cdot\frac{60^\circ}{360^\circ}-2\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left[x^2-\left\{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}x-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right\}\right]dx$$

$$=\frac{\pi}{2}-2\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(x^2-\sqrt{3}x+\frac{3}{4}\right)dx$$

$$=\frac{\pi}{2}-2\left[\frac{x^3}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}x^2+\frac{3}{4}x\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\pi}{{}^{カ}2}-\frac{\sqrt{{}^{キ}3}}{{}^{ク}4}$$